

СПЕКТРЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ.

Аннотация

В материале данной работы с использованием преобразования Фурье проведён анализ двумерного спектра простейших составляющих пространственной структуры изображений и рассмотрены особенности выполнения такого анализа. Полученные результаты могут использоваться при анализе и выборе характеристик элементов одномерной и многомерной обработки видеoinформации в системах цифрового телевидения, формировании телевизионных испытательных сигналов и таблиц с заданными параметрами спектра, определении двумерных функций “окна,” имеющих относительно сложную форму за счёт суперпозиции функций простейшего вида, при реализации адаптивной цифровой многомерной селекции составляющих структуры сигналов телевизионных изображений.

При разработке систем цифрового телевидения (СЦТ), предназначенных для контроля ограниченного числа объектов определенной в контролируемом пространстве формы, важное значение имеет учет тонкой специфики сопряженного с формой объектов многомерного спектра соответствующих изображений. Такой учет позволяет обычно ограничить требования к характеристикам и параметрам элементов дискретизации и обработки видеoinформации в СЦТ и, следовательно, упростить решение задачи ее реализации. Разработчик, безусловно, должен находить правильное соотношение между ужесточением требований к характеристикам и параметрам элементов обработки в СЦТ и относительной величиной того эффекта в приращении качества изображений, который в результате жесткости требований получают. Для решения подобной задачи необходимо учитывать особенности спектра простейших (элементарных) составляющих в структуре ансамбля контролируемых изображений. Удачная суперпозиция в заданном порядке простейших составляющих, отличающихся по протяженности (объему), позволяет получить представление о структуре и предельных параметрах многомерного спектра различных и более сложных изображений. Важно для данного типа СЦТ определить структуру эталонного изображения, которое должно передаваться в СЦТ с определенными допусками на искажения. Спектр эталонного изображения, в свою очередь, задает при этом требования на параметры и характеристики элементов обработки видеoinформации в СЦТ.

С другой стороны взаимная заменяемость аргументов в соотношениях для спектра и соответствующей (данному спектру) реальной функции выявляет обратимость результатов, полученных при анализе спектральных характеристик. Соответственно синтез, например, испытательных изображений, имеющих заданный вид многомерного спектра, может базироваться на обращении функции спектра необходимого вида в реальную функцию: задаётся спектр такой функции. Полученная функция спектра обращается в реальную функцию. Вид спектра этой функции соответственно отвечает заданным требованиям. Здесь также уместно использование суперпозиции с различным “весом” функций составляющих спектра.

В материале представленной статьи применяются традиционные методы (преобразование Фурье) анализа спектра по своему непосредственному назначению

Полученные результаты могут использоваться при анализе и выборе характеристик элементов одномерной и многомерной обработки видеoinформации в СЦТ, формировании телевизионных испытательных сигналов и таблиц, определении двумерных функций “окна,” имеющих относительно сложную форму и полученных суперпозицией функций простейшего вида, для реализации цифровой многомерной фильтрации сигналов телевизионных изображений и др.

Рассмотрим спектры наиболее распространенных функций ограничения (деталей структуры) воздействия в пространстве изображений. Найдем, в частности, спектр ограничения, соответствующий эллиптическому цилиндру единичной амплитуды:

$$K_{iN}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ h = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Подставив данные (1) в двумерное преобразование Фурье(Ф), получим спектральную плотность функции ограничения:

$$S_K(\omega_x, \omega_y) = \Phi \left[K_{oc}(x, y) \right] = 2\pi ab \frac{\mathfrak{I}_1 \left(\sqrt{\frac{\omega_y^2}{1/b^2} + \frac{\omega_x^2}{1/a^2}} \right)}{\sqrt{\frac{\omega_y^2}{1/b^2} + \frac{\omega_x^2}{1/a^2}}}. \quad (2)$$

В соответствии с (2) значение спектра в точке нулевых частот ($\omega_x = \omega_y = 0$) равно объему цилиндра единичной амплитуды $S_K(0,0) = \pi ab$. Если считать, что $b=ka$, то

$$S_{K0}(\omega_x, \omega_y) = \frac{S_K(\omega_x, \omega_y)}{S_K(0,0)} = 2 \frac{\mathfrak{I}_1 \left(\sqrt{\frac{\omega_y^2}{1/k^2 a^2} + \frac{\omega_x^2}{1/a^2}} \right)}{\sqrt{\frac{\omega_y^2}{1/k^2 a^2} + \frac{\omega_x^2}{1/a^2}}}. \quad (3)$$

- относительная величина спектральной плотности эллиптического цилиндра. При $k=1$ полученное соотношение (3) представляет собой относительную спектральную плотность кругового цилиндра.

Найдем спектр функции ограничения, соответствующий эллипсоиду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad z > 0, \quad c^2 = 1. \quad (4)$$

Подставив данные (4) в преобразование Фурье, получим спектральную плотность функции ограничения:

$$S_K(\omega_x, \omega_y) = 2\sqrt{2\pi}ab \tilde{A}(1,5) \frac{\mathfrak{I}_{1,5} \left[\frac{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}{2} \right]}{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2} = 4\sqrt{\pi}ab \tilde{A}(1,5) \frac{j_1 \left[\frac{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}{2} \right]}{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}, \quad (5)$$

$j_1(z)$ - сферическая функция Бесселя первого порядка и рода.

В соответствии с (5) относительная величина спектральной плотности эллипсоида

$$S_{K0}(\omega_x, \omega_y) = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \tilde{A}(1,5) \frac{j_1 \left[\frac{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}{2} \right]}{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}. \quad (6)$$

Спектр функции ограничения, соответствующий полусфере, отражается полученными соотношениями (5) и (6) при $a=b=c=R=1$.

Аналогичным образом определяется спектр функции ограничения, соответствующий эллиптическому параболоиду

$$K_{OC}(x, y) = z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{и} \quad z > 0, \quad c^2 = 1. \quad (7)$$

В результате преобразования функции ограничения (7) получим выражение для спектральной плотности:

$$S_K(\omega_x, \omega_y) = \Phi K_{OC}(x, y) = 4\pi ab \tilde{A}(2) \frac{\mathfrak{I}_2 \left[\frac{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}{2} \right]}{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}. \quad (8)$$

Согласно полученному выражению

$$S_{K0}(\omega_x, \omega_y) = 8\tilde{A}(2) \frac{\mathfrak{I}_2 \left[\frac{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}{2} \right]}{\omega_y^2 b^2 + \omega_x^2 a^2}. \quad (9)$$

Найдем, спектр функций с осевой симметрией вида:

$$\begin{aligned} k_{,n}(x, y) &= 1 - x^2 + y^2^{-n} \text{ при } x^2 + y^2 \leq 1; \\ k_{,n}(x, y) &= 0 \text{ при } x^2 + y^2 > 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Перейдем к системе полярных координат в плоскости x, y и ω_x, ω_y :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; x = r \cdot \cos \theta; \\ \theta &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right); y = r \cdot \sin \theta; \\ \omega_\rho &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}; \omega_x = \omega_\rho \cos \varphi; \\ \varphi &= \arctg\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right); \omega_y = \omega_\rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Задавая текущим пределом (z) в преобразовании Ганкеля, найдем спектр функции, соответствующей соотношению (10) - $k_{iN}(x, y)$:

$$S_k(\omega_\rho, z) = 2\pi \int_0^z r \cdot k_{iN}(r) \cdot \mathfrak{I}_0(\omega_\rho \cdot r) dr = 2\pi \int_0^z r \cdot (1 - r^{2n}) \cdot \mathfrak{I}_0(\omega_\rho \cdot r) dr.$$

Соответственно получим:

$$\begin{aligned} S_k(\omega_\rho, z) &= \frac{2\pi \cdot z \cdot \tilde{A}(1)}{\omega_\rho \cdot \tilde{A}(0)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot \frac{\tilde{A}(k)}{\tilde{A}(2+k)} \cdot \mathfrak{I}_{2k+1}(z\omega_\rho) - \frac{2\pi \cdot z^{2n+1} \cdot \tilde{A}(n+1)}{\omega_\rho \cdot \tilde{A}(-n)} \cdot \\ &\cdot \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot \frac{\tilde{A}(-n+k)}{\tilde{A}(n+2+k)} \cdot \mathfrak{I}_{2k+1}(z\omega_\rho). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим полученное соотношение (11), например, при $n=2$. В этом случае

$$\begin{aligned} S_k(\omega_\rho, z) &= \frac{2\pi \cdot z \cdot \tilde{A}(1)}{\omega_\rho \tilde{A}(0)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot \frac{\tilde{A}(k)}{\tilde{A}(2+k)} \cdot \mathfrak{I}_{2k+1}(z\omega_\rho) - \frac{2\pi \cdot z^5 \tilde{A}(3)}{\omega_\rho \tilde{A}(-2)} \cdot \\ &\cdot \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot \frac{\tilde{A}(-2+k)}{\tilde{A}(4+k)} \cdot \mathfrak{I}_{2k+1}(z\omega_\rho). \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом свойств гамма-функции преобразуем соотношение (12) следующим образом:

$$S_k(\omega_\rho, z) = 2\pi \cdot z^2 \frac{\mathfrak{I}_1(z\omega_\rho)}{z\omega_\rho} - \frac{2}{3} \pi z^6 \frac{\mathfrak{I}_1(z\omega_\rho)}{z\omega_\rho} + \frac{2}{4} \pi z^6 \frac{\mathfrak{I}_3(z\omega_\rho)}{z\omega_\rho} - \frac{2}{12} \pi z^6 \frac{\mathfrak{I}_5(z\omega_\rho)}{z\omega_\rho}. \quad (13)$$

В соответствии с (13) при текущем пределе $z \ll 1$ (например, $z=0,2$)

$$S(\omega_\rho, z) \approx 2\pi \cdot z^2 \frac{\mathfrak{I}_1(z\omega_\rho)}{z\omega_\rho}.$$

Обозначим

$$\beta_v = \frac{\mathfrak{I}_v(z\omega_\rho)}{z\omega_\rho}, \text{ а } \beta_{ov} = \frac{\mathfrak{I}_v(z\omega_\rho \rightarrow 0)}{z\omega_\rho \rightarrow 0}.$$

Для получения величины β_0 воспользуемся представлением в виде ряда $\mathfrak{I}_1(z\omega_\rho)$:

$$\mathfrak{I}_1(z\omega_\rho) = \left(\frac{z\omega_\rho}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{(z\omega_\rho)^2}{4}\right)^k}{k! \tilde{A}(2+k)}.$$

Соответственно $\beta_{01} = \frac{1}{2}$.

На Рис.1 показаны расчетные зависимости функции $d_v = \frac{\beta_v}{\beta_{ov}}$ от пространственной частоты, выраженной в периодах на единицу длины радиуса, при $z=0,1$ (график 3); $0,2$ (график 2); $0,4$ (график 1).

Проведенные по полученным здесь соотношениям расчеты показали, что в форме спектра $S_k(\omega_\rho, z)$ с приближением z к единице имеет уменьшения отношения амплитуд второго и других (более высоких по порядку) лепестков функции спектра к амплитуде первого лепестка. Расширяется также диапазон частот первого лепестка и, соответственно, сдвигается по оси частот положение остальных лепестков спектра.

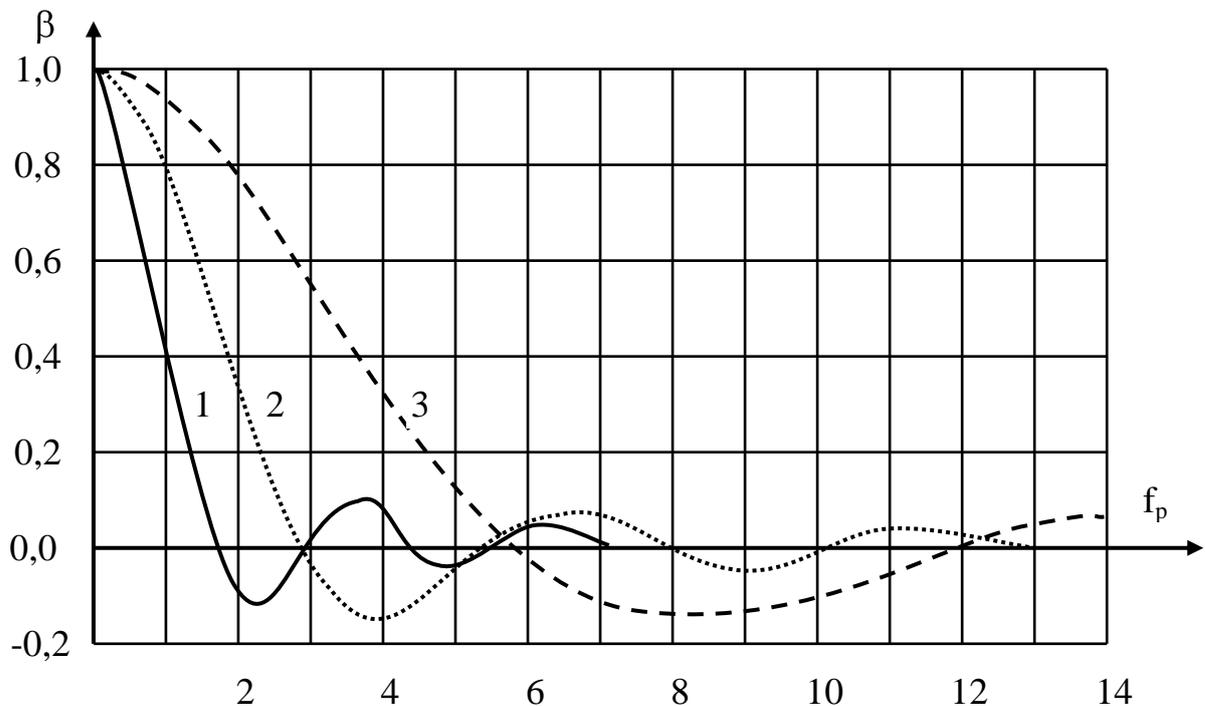


Рисунок 1. Расчётные зависимости спектра двумерной функции с осевой симметрией параболического типа

Наиболее простой вид имеет спектральная плотность функции ограничения, соответствующей прямоугольному параллелепипеду единичной высоты, ось симметрии которого совпадает с осью z , а стороны параллельны осям x, y . Если $2a$ и $2b$ ребра такого параллелепипеда, то

$$S_K(\omega_x, \omega_y) = 4ab \cdot \frac{\sin \omega_x a}{\omega_x a} \cdot \frac{\sin \omega_y b}{\omega_y b}.$$

и, следовательно,

$$S_{K_0}(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin \omega_x a}{\omega_x a} \cdot \frac{\sin \omega_y b}{\omega_y b}. \quad (14)$$

Сопоставим соотношение (14) с соотношением спектральной плотности, соответствующей прямой призме, осью симметрии которой является ось z, основанием - ромб, а диагонали совпадают с осями x и y. В квадратах плоскости XOY основание призмы ограничивается прямыми. Для первого квадранта уравнение такой линии имеет следующий вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

С учетом этого получим:

$$S_K(\omega_x, \omega_y) = \frac{2ab}{\omega_y b} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_x a + \omega_y b) \sin \frac{1}{2}(\omega_x a - \omega_y b)}{\frac{1}{2}(\omega_x a - \omega_y b)} - \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_x a - \omega_y b) \sin \frac{1}{2}(\omega_x a + \omega_y b)}{\frac{1}{2}(\omega_x a + \omega_y b)} \right]. \quad (15)$$

Конфигурация сечений соотношений для спектральных плотностей (14) и (15) плоскостью фиксированного уровня имеет анизотропный характер. Причем в первом случае радиус наибольшей протяженности сечения ориентирован вдоль осей $0\omega_x \in 0\omega_y$, а наименьшей протяженности - вдоль линий $\omega_x a = \omega_y b$. Во втором случае ориентация сечения имеет обратный вид. Значительное усложнение соотношений спектральной плотности имеет место в случае, когда реальная функция ограничения приобретает форму пирамиды или конуса. Если, в частности, функция ограничения описывается правильной четырехугольной пирамидой следующего вида:

$$K_{OC}(x, y) = z = 1 - \frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b},$$

то

$$S_K(\omega_x, \omega_y) = 4 \left\{ \begin{aligned} & \frac{ab}{b^2 \omega_y^2} \cdot \frac{\sin a \omega_x}{a \omega_x} - \frac{ab}{2b^2 \omega_y^2} \cos b \omega_y \left[\frac{\sin(\omega_y - a \omega_x)}{b \omega_y - a \omega_x} - \frac{\sin(\omega_y + a \omega_x)}{b \omega_y + a \omega_x} \right] + \\ & \left. + \frac{ab}{2b^2 \omega_y^2} \sin b \omega_y \left[\frac{\cos(\omega_y - a \omega_x)}{b \omega_y - a \omega_x} + \frac{\cos(\omega_y + a \omega_x)}{b \omega_y + a \omega_x} - \frac{1}{b \omega_y - a \omega_x} - \frac{1}{b \omega_y + a \omega_x} \right] \right\}. \quad (16) \end{aligned} \right.$$

Задача определения структуры спектра функций ограничения существенно упрощается в случае реализации функций ограничения с независимыми анизотропными по ортогональным направлениям в пространстве изменениями, распадаясь на более простые задачи определения одномерных спектральных плотностей. Результирующая спектральная плотность при этом может быть получена за счет перемножения результатов одномерного анализа. В случае несовпадения заданных осей пространства XOY с осями независимых ортогональных изменений целесообразно отдельно определить спектральную плотность для осей, совпадающих с независимыми ортогональными изменениями функции ограничения, а затем учесть в спектральной области поворот объекта на фиксированный угол.

Простейшим примером функции ограничения такого рода является рассмотренная ранее функция ограничения, соответствующая прямоугольному параллелепипеду. В реальном пространстве данная функция ограничения может быть представлена произведением функций:

$$f(x, y) = \text{rect}x \cdot \text{rect}y = \begin{cases} 1 & |x| \leq a; |y| \leq b \\ 0 & |x| > a; |y| > b \end{cases}$$

В соответствии с (14.) в спектральном пространстве при этом имеет место произведение одномерных спектральных плотностей, соответствующих функциям $\text{rect}(x)$ и $\text{rect}(y)$. Процедура решения задачи анализа спектральной плотности двумерных функций ограничения различного типа может кроме того упрощаться за счет последовательного выполнения в спектральной области ряда преобразований, являющихся отражением соответствующих преобразований в реальной области, конечным результатом совокупности которых является анализируемая функция ограничения. При этом целесообразно провести анализ для функции ограничения с определенной ориентацией в реальной области, обеспечивающей упрощение необходимых преобразований в спектральной области. Затем осуществить коррекцию полученного выражения для спектральной плотности, учитывающую положение и ориентацию в пространстве реальной функции ограничения. Простейшей коррекцией является, например, коррекция, учитывающая перенос функции ограничения в пространстве без поворота. Переход к исходному положению функции ограничения в таком случае реализуется соответствующим изменением фазовой характеристики в полученном выражении для спектральной плотности. В выражении спектра положение функции ограничения при этом учитывается, например, сомножителем типа $\exp\left[-j\omega_x \frac{\tau_x(i+1) + \tau_{xi}}{2} - j\omega_y \frac{\tau_y(i+1) + \tau_{yi}}{2}\right]$, отражающим сдвиг функции ограничения (на интервалы $\tau_{xi} = \text{const}$, $\tau_{yi} = \text{const}$) по отношению к началу координат. Другим вариантом изменения ориентации, как отмечалось выше, является поворот предварительно совмещенной (например, переносом) с началом координат функции ограничения на некоторый угол θ . Такой поворот воздействия на угол θ относительно оси OZ может быть учтен в выражении спектральной плотности (естественно без поворота) заменой ω_x и ω_y на $\omega_{x\theta}$ и $\omega_{y\theta}$:

$$\begin{aligned} \omega_{x\theta} &= \omega_x \cos\theta - \omega_y \sin\theta; \\ \omega_{y\theta} &= \omega_x \sin\theta + \omega_y \cos\theta. \end{aligned} \tag{17}$$

Выражение (17) свидетельствует о том, что поворот функции ограничения сопровождается значительными изменениями структуры соотношения спектральной плотности, соответствующего преобра-

зованной таким образом функции ограничения. Очередность операций поворота и переноса составляющих функций ограничения может быть различной и определяется видом общей функции ограничения.

Таким образом, не представляет значительной сложности определения спектральной плотности для функций ограничения, которые задаются в реальном пространстве произведением простейших одномерных функций, например, вида $rect(x), rect(y), \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right), \exp\left(-\frac{|y|}{b}\right), \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), \exp\left(-\frac{y^2}{b^2}\right)$ и т.д. и одномерные спектральные плотности для которых уже известны.

Поэтому важное значение в связи с этим продолжает иметь задача дальнейшей разработки методов анализа спектров и одномерных функций различной формы.

С другой стороны, кроме рассмотренных операторов ограничения воздействия в реальном пространстве и сопряженной области пространственных частот, в современных СЦТ используются операторы ограничения воздействия во времени и по составу спектра излучения, которыми отражаются соответствующие изменения составляющих структуры изображения в четырёхмерном видеoinформационном пространстве.